

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Αρχοντία Γιαννοπούλου
Όλγα Φουρτουνέλλη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αλγόριθμοι σε Γραφήματα III

Διάσχιση Γραφημάτων και Εφαρμογές

Αναζήτηση κατά βάθος (Depth-First Search)

DFS(G, s)

$R = \emptyset$

Για κάθε $u \in V$

 Εξερευνημένη(u) = false

Εξερευνημένη(s) = true

$R = \{s\}$

Για κάθε ακμή $\{s, u\}$ στο G

 Εάν Εξερευνημένη(u) = false

$S = \text{DFS}(G - s, u)$

$R = R \cup S$

Επίστρεψε R

Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

BFS δαισθητικά. Εξερεύνηση από την s προς όλες τις πιθανές κατευθύνσεις, προσθέτοντας κορυφές άνα ένα “επίπεδο” τη φορά.

Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

BFS διαισθητικά. Εξερεύνηση από την s προς όλες τις πιθανές κατευθύνσεις, προσθέτοντας κορυφές άνα ένα “επίπεδο” τη φορά.

Ο αλγόριθμος BFS.

- $L_0 = \{s\}$.
- $L_1 =$ όλοι οι γείτονες του L_0 .
- $L_2 =$ όλες οι κορυφές που δεν ανήκουν στο L_0 ή στο L_1 , και έχουν μια ακμή προς μία κορυφή στο L_1 .
- $L_{i+1} =$ όλες οι κορυφές που δεν ανήκουν σε προηγούμενο επίπεδο, και έχουν μια ακμή προς μία κορυφή στο L_i .

Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

BFS διαισθητικά. Εξερεύνηση από την s προς όλες τις πιθανές κατευθύνσεις, προσθέτοντας κορυφές άνα ένα “επίπεδο” τη φορά.

Ο αλγόριθμος BFS.

- $L_0 = \{s\}$.
- $L_1 =$ όλοι οι γείτονες του L_0 .
- $L_2 =$ όλες οι κορυφές που δεν ανήκουν στο L_0 ή στο L_1 , και έχουν μια ακμή προς μία κορυφή στο L_1 .
- $L_{i+1} =$ όλες οι κορυφές που δεν ανήκουν σε προηγούμενο επίπεδο, και έχουν μια ακμή προς μία κορυφή στο L_i .

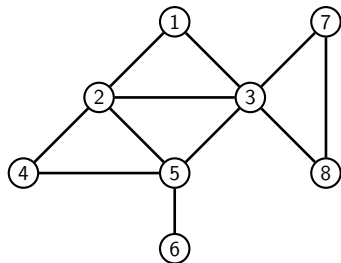
Θεώρημα. Για κάθε i , το L_i αποτελείται από όλες τις κορυφές σε απόσταση ακριβώς i από την s . Υπάρχει διαδρομή από την s στην t αν και μόνο αν η t εμφανίζεται σε κάποιο επίπεδο.

Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

Ιδιότητα. Έστω T ένα δένδρο με ρίζα s που παράγεται από τον BFS στο $G = (V, E)$ και έστω $\{x, y\}$ ακμή του G . Τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.

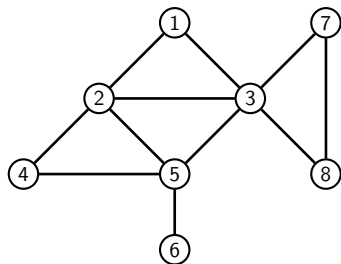
Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

Ιδιότητα. Έστω T ένα δένδρο με ρίζα s που παράγεται από τον BFS στο $G = (V, E)$ και έστω $\{x, y\}$ ακμή του G . Τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.



Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

Ιδιότητα. Έστω T ένα δένδρο με ρίζα s που παράγεται από τον BFS στο $G = (V, E)$ και έστω $\{x, y\}$ ακμή του G . Τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.

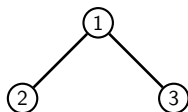
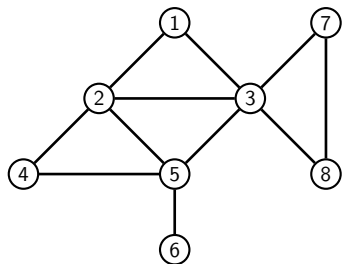


①

L_0

Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

Ιδιότητα. Έστω T ένα δένδρο με ρίζα s που παράγεται από τον BFS στο $G = (V, E)$ και έστω $\{x, y\}$ ακμή του G . Τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.

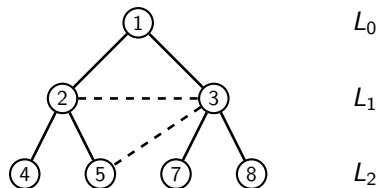
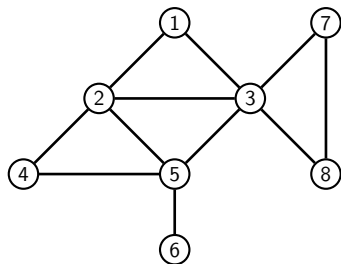


L_0

L_1

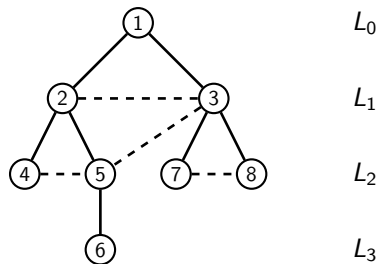
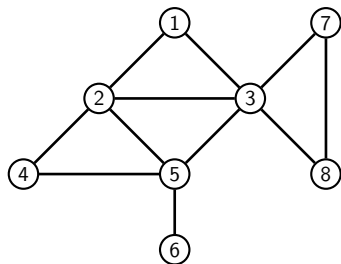
Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

Ιδιότητα. Έστω T ένα δένδρο με ρίζα s που παράγεται από τον BFS στο $G = (V, E)$ και έστω $\{x, y\}$ ακμή του G . Τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.



Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth-First Search)

Ιδιότητα. Έστω T ένα δένδρο με ρίζα s που παράγεται από τον BFS στο $G = (V, E)$ και έστω $\{x, y\}$ ακμή του G . Τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.



Ο Αλγόριθμος

BFS(G, s)

Για κάθε $v \in V$ // V οι κορυφές του γραφήματος G

Αναγνωσμένη(v) = false

$\pi[v] \leftarrow \emptyset$

Αναγνωσμένη(s) = true

$L[0] = \{s\}$

$i \leftarrow 0$ // δένδρο $T = \{s\}$.

ενόσω $L[i] \neq \emptyset$

αρχικοποίηση κενής λίστας $L[i + 1]$ // νέο επίπεδο

για κάθε $u \in L[i]$

για κάθε $\{u, v\} \in E$

εάν Αναγνωσμένη(v) = false **τότε**

Αναγνωσμένη(v) = true

$\pi[v] \leftarrow u$ // $T = T \cup \{u, v\}$

$L[i + 1] \leftarrow L[i + 1] \cup \{v\}$ // νέα κορυφή

$i \leftarrow i + 1$

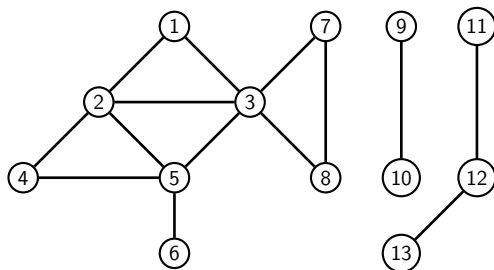
Η παραπάνω υλοποίηση του αλγορίθμου BFS τρέχει σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$ αν το γράφημα δίνεται με την αναπαράσταση λιστών γειτνίασης.

Εφαρμογές

Συνεκτική συνιστώσα. Βρείτε όλες τις κορυφές που μπορούμε να επισκεφθούμε από την s .

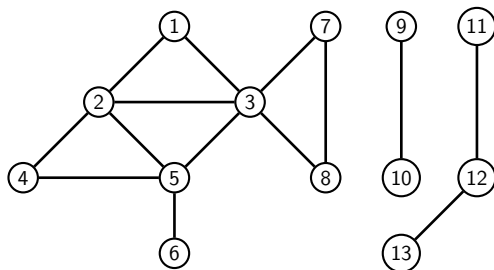
Εφαρμογές

Συνεκτική συνιστώσα. Βρείτε όλες τις κορυφές που μπορούμε να επισκεφθούμε από την s .



Εφαρμογές

Συνεκτική συνιστώσα. Βρείτε όλες τις κορυφές που μπορούμε να επισκεφθούμε από την s .



Αν $s = 1$ τότε η συνεκτική συνιστώσα είναι αυτή που αποτελείται από τις κορυφές 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Αν $s = 9$ τότε η συνεκτική συνιστώσα είναι αυτή που αποτελείται από τις κορυφές 9, 10.

Αν $s = 11$ τότε η συνεκτική συνιστώσα είναι αυτή που αποτελείται από τις κορυφές 11, 12, 13.

Εφαρμογές

Γέμισμα περιοχών με χρώμα. Δεδομένων πράσινων εικονοστοιχείων (pixels) σε μια εικόνα, άλλαξε το χρώμα ολόκληρης της επιφάνειας των γειτονικών πράσινων εικονοστοιχείων σε μπλέ.

Εφαρμογές

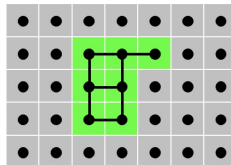
Γέμισμα περιοχών με χρώμα. Δεδομένων πράσινων εικονοστοιχείων (pixels) σε μια εικόνα, άλλαξε το χρώμα ολόκληρης της επιφάνειας των γειτονικών πράσινων εικονοστοιχείων σε μπλέ.

- Κορυφές: εικονοστοιχεία.
- Ακμή: δύο γειτονικά πράσινα εικονοστοιχεία.
- Επιφάνεια: συνεκτική συνιστώσα των πράσινων εικονοστοιχείων

Εφαρμογές

Γέμισμα περιοχών με χρώμα. Δεδομένων πράσινων εικονοστοιχείων (pixels) σε μια εικόνα, άλλαξε το χρώμα ολόκληρης της επιφάνειας των γειτονικών πράσινων εικονοστοιχείων σε μπλέ.

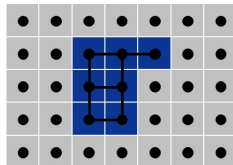
- Κορυφές: εικονοστοιχεία.
- Ακμή: δύο γειτονικά πράσινα εικονοστοιχεία.
- Επιφάνεια: συνεκτική συνιστώσα των πράσινων εικονοστοιχείων



Εφαρμογές

Γέμισμα περιοχών με χρώμα. Δεδομένων πράσινων εικονοστοιχείων (pixels) σε μια εικόνα, άλλαξε το χρώμα ολόκληρης της επιφάνειας των γειτονικών πράσινων εικονοστοιχείων σε μπλέ.

- Κορυφές: εικονοστοιχεία.
- Ακμή: δύο γειτονικά πράσινα εικονοστοιχεία.
- Επιφάνεια: συνεκτική συνιστώσα των πράσινων εικονοστοιχείων



Διμερή γραφήματα

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν κόκκινες ή μπλε έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει ένα κόκκινο και ένα μπλε άκρο.

Διμερή γραφήματα

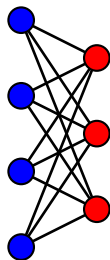
Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν κόκκινες ή μπλε έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει ένα κόκκινο και ένα μπλε άκρο.

- Ευσταθές ταίριασμα: νοσοκομεία = **κόκκινο**, γιατροί = **μπλε**.
- Χρονοπρογραμματισμός: μηχανές = **κόκκινο**, εργασίες = **μπλε**.

Διμερή γραφήματα

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές αν οι κορυφές του μπορούν να χρωματιστούν κόκκινες ή μπλε έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει ένα κόκκινο και ένα μπλε άκρο.

- Ευσταθές ταίριασμα: νοσοκομεία = **κόκκινο**, γιατροί = **μπλε**.
- Χρονοπρογραμματισμός: μηχανές = **κόκκινο**, εργασίες = **μπλε**.



Ένα διμερές γράφημα με το μέγιστο πλήθος ακμών

Διμερότητα

Έλεγχος διμερότητας. Δεδομένου ενός γραφήματος G , είναι αυτό διμερές;

Διμερότητα

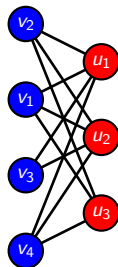
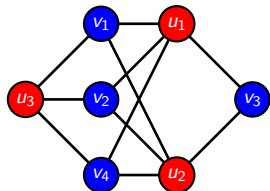
Έλεγχος διμερότητας. Δεδομένου ενός γραφήματος G , είναι αυτό διμερές;

- Πολλά προβλήματα γραφημάτων γίνονται:
 - ▷ Εύκολα αν το υποκείμενο γράφημα είναι διμερές (ταίριασμα)
 - ▷ Επιλύσιμα αν το υποκείμενο γράφημα είναι διμερές (ανεξάρτητο σύνολο)
- Πριν προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο, πρέπει να καταλάβουμε την δομή των διμερών γραφημάτων.

Διμερότητα

Έλεγχος διμερότητας. Δεδομένου ενός γραφήματος G , είναι αυτό διμερές;

- Πολλά προβλήματα γραφημάτων γίνονται:
 - ▷ Εύκολα αν το υποκείμενο γράφημα είναι διμερές (ταίριασμα)
 - ▷ Επιλύσιμα αν το υποκείμενο γράφημα είναι διμερές (ανεξάρτητο σύνολο)
- Πριν προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο, πρέπει να καταλάβουμε την δομή των διμερών γραφημάτων.



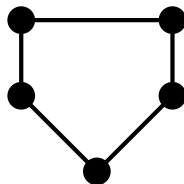
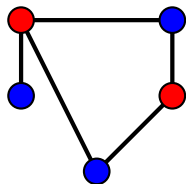
Εμπόδιο διμερότητας

Λήμμα. Αν ένα γράφημα G είναι διμερές, δεν μπορεί να περιέχει κύκλο **περιττού** μήκους.

Εμπόδιο διμερότητας

Λήμμα. Αν ένα γράφημα G είναι διμερές, δεν μπορεί να περιέχει κύκλο **περιττού** μήκους.

Απόδειξη. Δεν μπορούμε να χρωματίσουμε έναν περιττό κύκλο με 2-χρώματα άρα και κανένα γράφημα που τον περιέχει.



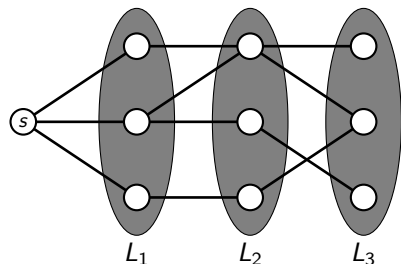
Διμερή γραφήματα

Λήμμα. Έστω G συνεκτικό γράφημα, και έστω L_0, \dots, L_k τα επίπεδα που παράγονται από τον BFS ξεκινώντας από μία κορυφή s . Ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:

Διμερή γραφήματα

Λήμμα. Έστω G συνεκτικό γράφημα, και έστω L_0, \dots, L_k τα επίπεδα που παράγονται από τον BFS ξεκινώντας από μία κορυφή s . Ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:

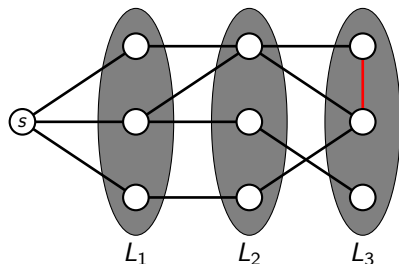
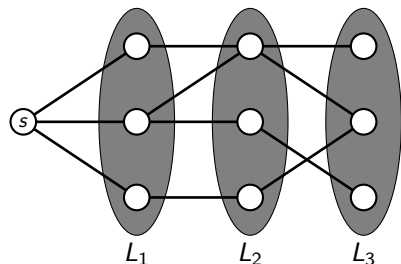
- 1 Καμία ακμή στο G δεν ενώνει δύο κορυφές ίδιου επιπέδου, και το G είναι διμερές. (Θυμηθείτε την ιδιότητα ότι αν $\{x, y\}$ είναι ακμή του G τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.)



Διμερή γραφήματα

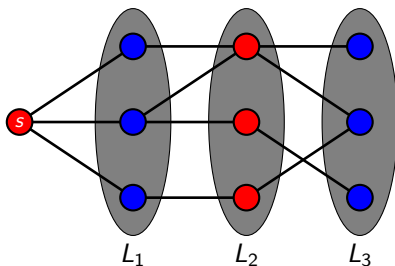
Λήμμα. Έστω G συνεκτικό γράφημα, και έστω L_0, \dots, L_k τα επίπεδα που παράγονται από τον BFS ξεκινώντας από μία κορυφή s . Ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:

- 1 Καμία ακμή στο G δεν ενώνει δύο κορυφές ίδιου επιπέδου, και το G είναι διμερές. (Θυμηθείτε την ιδιότητα ότι αν $\{x, y\}$ είναι ακμή του G τότε τα επίπεδα των x και y διαφέρουν το πολύ κατά 1.)
- 2 Μια ακμή του G ενώνει δύο κορυφές στο ίδιο επίπεδο άρα το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους (κατά συνέπεια δεν είναι διμερές).



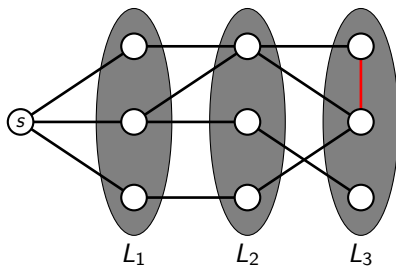
Απόδειξη (1)

Έστω ότι καμία ακμή στο G δεν ενώνει δύο κορυφές ίδιου επιπέδου. Τότε μπορούμε να χρωματίσουμε τα άρτια επίπεδα **κόκκινα** και τα περιττά επίπεδα **μπλέ**.



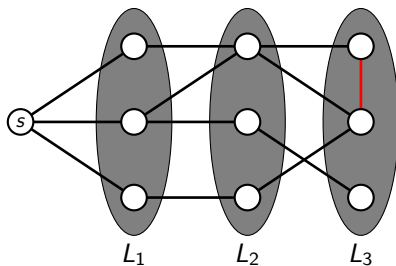
Απόδειξη (2)

Έστω ότι μια ακμή του G ενώνει δύο κορυφές στο ίδιο επίπεδο άρα το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους (κατά συνέπεια δεν είναι διμερές).



Απόδειξη (2)

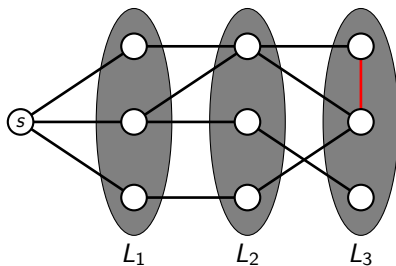
Έστω ότι μια ακμή του G ενώνει δύο κορυφές στο ίδιο επίπεδο άρα το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους (κατά συνέπεια δεν είναι διμερές).



- Έστω (x, y) ακμή με x, y στο ίδιο επίπεδο L_j .

Απόδειξη (2)

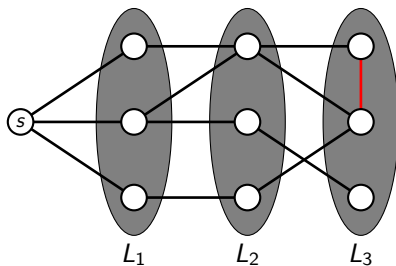
Έστω ότι μια ακμή του G ενώνει δύο κορυφές στο ίδιο επίπεδο άρα το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους (κατά συνέπεια δεν είναι διμερές).



- Έστω (x, y) ακμή με x, y στο ίδιο επίπεδο L_j .
- Έστω $z = \text{lca}(x, y) =$ χαμηλότερος κοινός πρόγονος.

Απόδειξη (2)

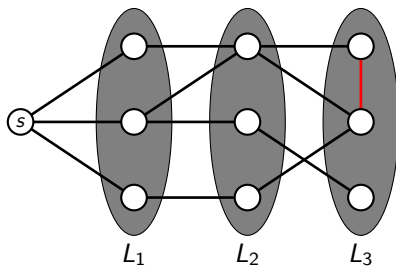
Έστω ότι μια ακμή του G ενώνει δύο κορυφές στο ίδιο επίπεδο άρα το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους (κατά συνέπεια δεν είναι διμερές).



- Έστω (x, y) ακμή με x, y στο ίδιο επίπεδο L_j .
- Έστω $z = \text{lca}(x, y) =$ χαμηλότερος κοινός πρόγονος.
- Έστω L_i το επίπεδο που περιέχει τον z .

Απόδειξη (2)

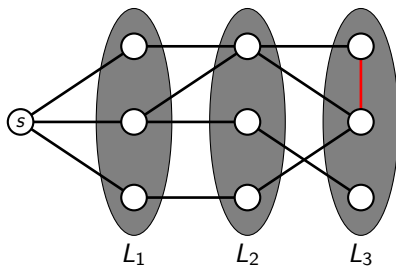
Έστω ότι μια ακμή του G ενώνει δύο κορυφές στο ίδιο επίπεδο άρα το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους (κατά συνέπεια δεν είναι διμερές).



- Έστω (x, y) ακμή με x, y στο ίδιο επίπεδο L_j .
- Έστω $z = \text{lca}(x, y) =$ χαμηλότερος κοινός πρόγονος.
- Έστω L_i το επίπεδο που περιέχει τον z .
- Θεωρούμε κύκλο (διακριτών κορυφών) που αποτελείται από την ακμή (x, y) , την απλή διαδρομή $y \rightarrow z$, και την απλή διαδρομή $z \rightarrow x$.

Απόδειξη (2)

Έστω ότι μια ακμή του G ενώνει δύο κορυφές στο ίδιο επίπεδο άρα το G περιέχει κύκλο περιττού μήκους (κατά συνέπεια δεν είναι διμερές).



- Έστω (x, y) ακμή με x, y στο ίδιο επίπεδο L_j .
- Έστω $z = \text{lca}(x, y) =$ χαμηλότερος κοινός πρόγονος.
- Έστω L_i το επίπεδο που περιέχει τον z .
- Θεωρούμε κύκλο (διακριτών κορυφών) που αποτελείται από την ακμή (x, y) , την απλή διαδρομή $y \rightarrow z$, και την απλή διαδρομή $z \rightarrow x$.
- Το μήκος του είναι $\underbrace{1}_{\{x,y\}} + \underbrace{(j-i)}_{\text{διαδρομή } y \rightarrow z} + \underbrace{(j-i)}_{\text{διαδρομή } z \rightarrow x}$, και άρα περιττό.

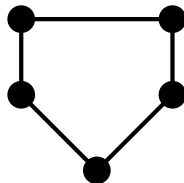
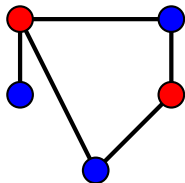
Εμπόδιο διμερότητας ξανά

Λήμμα. Ένα γράφημα G είναι διμερές αν και μόνο αν **δεν** περιέχει κύκλο **περιττού** μήκους.

Εμπόδιο διμερότητας ξανά

Λήμμα. Ένα γράφημα G είναι διμερές αν και μόνο αν **δεν** περιέχει κύκλο **περιττού** μήκους.

Απόδειξη. Δεν μπορούμε να χρωματίσουμε έναν περιττό κύκλο με 2-χρώματα άρα και κανένα γράφημα που τον περιέχει.



Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$

- V = κορυφές (nodes) ή κόμβοι (nodes)
- A = διατεταγμένα ζευγάρια κορυφών (edges).
Η ακμή (u, v) κατευθύνεται **από** την κορυφή u **στην** κορυφή v .

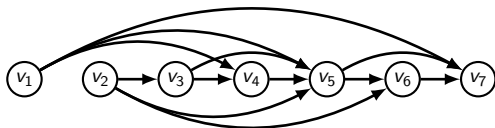
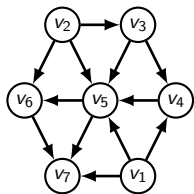
Δοσμένης μίας κορυφής v , καλούμε

- **εσώβαθμο** $\text{indegree}(v)$ της v το πλήθος των ακμών που έχουν κατεύθυνση προς την v και
- **εξώβαθμο** $\text{outdegree}(v)$ το πλήθος των ακμών που ξεκινάνε από την v .

Τότε

$$\sum_{v \in V} \text{indegree}(v) = \sum_{v \in V} \text{outdegree}(v).$$

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα



Γράφημα Παγκόσμιου Ιστού

- Ένας υπερσύνδεσμος μοντελοποιεί τις ακμές δείχνοντας από μια ιστοσελίδα σε μια άλλη.
- Η κατεύθυνση στο γράφημα είναι σημαντική.
- Οι σύγχρονες μηχανές αναζήτησης Παγκόσμιου Ιστού εκμεταλλεύονται την δομή των υπερσυνδέσμων για να ιεραρχήσουν τις ιστοσελίδες με βάση το πόσο σημαντικές είναι.

Αναζήτηση κατευθυνόμενων γραφημάτων

Κατευθυνόμενη προσπελασιμότητα.

Δεδομένης μίας κορυφής s , βρείτε όλες τις κορυφές που είναι προσπελάσιμες από την s .

Πρόβλημα συντομότερης κατευθυνόμενης διαδρομής $s \rightarrow t$.

Δεδομένων δύο κορυφών s και t , ποιό είναι το μήκος της συντομότερης διαδρομής μεταξύ της s και της t ;

Αναζήτηση κατευθυνόμενων γραφημάτων

Διάσχιση Γραφήματος.

Ο αλγόριθμος BFS επεκτείνεται με ανάλογο τρόπο σε κατευθυνόμενα γραφήματα ακολουθώντας την φορά των ακμών, με την ίδια πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(m + n)$, όπου $m =$ πλήθος κατευθυνόμενων ακμών.

Σαρωτής παγκόσμιου ιστού (web crawler).

Ξεκινήστε από την ιστοσελίδα s . Βρείτε όλες τις ιστοσελίδες που είναι προσπελάσιμες από την s , είτε άμεσα είτε έμμεσα.

Ισχυρή συνεκτικότητα

Οι κορυφές u και v είναι **αμοιβαία προσπελάσιμες** αν υπάρχει μια διαδρομή από την u στην v και μία διαδρομή από την v στην u (όχι κατ' ανάγκη μεταξύ τους διακεκριμένες).

Ισχυρή συνεκτικότητα

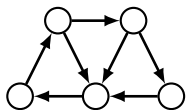
Οι κορυφές u και v είναι **αμοιβαία προσπελάσιμες** αν υπάρχει μια διαδρομή από την u στην v και μία διαδρομή από την v στην u (όχι κατ' ανάγκη μεταξύ τους διακεκριμένες).

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα καλείται **ισχυρά συνεκτικό** αν κάθε ζευγάρι κορυφών του είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.

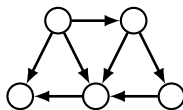
Ισχυρή συνεκτικότητα

Οι κορυφές u και v είναι **αμοιβαία προσπελάσιμες** αν υπάρχει μια διαδρομή από την u στην v και μία διαδρομή από την v στην u (όχι κατ' ανάγκη μεταξύ τους διακεκριμένες).

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα καλείται **ισχυρά συνεκτικό** αν κάθε ζευγάρι κορυφών του είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.



Ισχυρά συνεκτικό

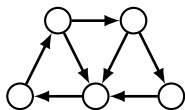


Όχι ισχυρά συνεκτικό

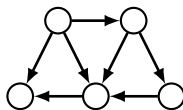
Ισχυρή συνεκτικότητα

Οι κορυφές u και v είναι **αμοιβαία προσπελάσιμες** αν υπάρχει μια διαδρομή από την u στην v και μία διαδρομή από την v στην u (όχι κατ' ανάγκη μεταξύ τους διακεκριμένες).

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα καλείται **ισχυρά συνεκτικό** αν κάθε ζευγάρι κορυφών του είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.



Ισχυρά συνεκτικό



Όχι ισχυρά συνεκτικό

Λήμμα Έστω ένα γράφημα G και μία κορυφή του s . Το G είναι ισχυρά συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε κορυφή του είναι προσπελάσιμη από την s και η s είναι προσπελάσιμη από κάθε κορυφή του.

Απόδειξη

⇒: Απευθείας από τον ορισμό.

Απόδειξη

\Rightarrow : Απευθείας από τον ορισμό.

\Leftarrow : Έστω δύο τυχαίες κορυφές u και v του G . Θα δείξουμε ότι οι u και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.

Απόδειξη

\Rightarrow : Απευθείας από τον ορισμό.

\Leftarrow : Έστω δύο τυχαίες κορυφές u και v του G . Θα δείξουμε ότι οι u και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.

- Αφού κάθε κορυφή είναι προσπελάσιμη από την s υπάρχουν οι διαδρομές $s \rightarrow u$ και $s \rightarrow v$.

Απόδειξη

\Rightarrow : Απευθείας από τον ορισμό.

\Leftarrow : Έστω δύο τυχαίες κορυφές u και v του G . Θα δείξουμε ότι οι u και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.

- Αφού κάθε κορυφή είναι προσπελάσιμη από την s υπάρχουν οι διαδρομές $s \rightarrow u$ και $s \rightarrow v$.
- Αφού η s είναι προσπελάσιμη από κάθε κορυφή υπάρχουν και οι διαδρομές $v \rightarrow s$ και $u \rightarrow s$.

Απόδειξη

\Rightarrow : Απευθείας από τον ορισμό.

\Leftarrow : Έστω δύο τυχαίες κορυφές u και v του G . Θα δείξουμε ότι οι u και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.

- Αφού κάθε κορυφή είναι προσπελάσιμη από την s υπάρχουν οι διαδρομές $s \rightarrow u$ και $s \rightarrow v$.
- Αφού η s είναι προσπελάσιμη από κάθε κορυφή υπάρχουν και οι διαδρομές $v \rightarrow s$ και $u \rightarrow s$.
- Τότε κατασκευάζουμε μία $u \rightarrow v$ διαδρομή ενώνοντας τις $u \rightarrow s$ και $s \rightarrow v$.

Απόδειξη

\Rightarrow : Απευθείας από τον ορισμό.

\Leftarrow : Έστω δύο τυχαίες κορυφές u και v του G . Θα δείξουμε ότι οι u και v είναι αμοιβαία προσπελάσιμες.

- Αφού κάθε κορυφή είναι προσπελάσιμη από την s υπάρχουν οι διαδρομές $s \rightarrow u$ και $s \rightarrow v$.
- Αφού η s είναι προσπελάσιμη από κάθε κορυφή υπάρχουν και οι διαδρομές $v \rightarrow s$ και $u \rightarrow s$.
- Τότε κατασκευάζουμε μία $u \rightarrow v$ διαδρομή ενώνοντας τις $u \rightarrow s$ και $s \rightarrow v$.
- Παρόμοια, κατασκευάζουμε μία $v \rightarrow u$ διαδρομή ενώνοντας τις $v \rightarrow s$ και $s \rightarrow u$.

Αλγόριθμος ισχυρής συνεκτικότητας

Θεώρημα. Μπορεί να αποφασιστεί αν το G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$.

Αλγόριθμος ισχυρής συνεκτικότητας

Θεώρημα. Μπορεί να αποφασιστεί αν το G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$.

- Διάλεξε οποιαδήποτε κορυφή s .

Αλγόριθμος ισχυρής συνεκτικότητας

Θεώρημα. Μπορεί να αποφασιστεί αν το G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$.

- Διάλεξε οποιαδήποτε κορυφή s .
- Τρέξε στο G τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του G προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).

Αλγόριθμος ισχυρής συνεκτικότητας

Θεώρημα. Μπορεί να αποφασιστεί αν το G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$.

- Διάλεξε οποιαδήποτε κορυφή s .
- Τρέξε στο G τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του G προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).
- Αντίστρεψε την φορά όλων των ακμών στο G και πάρε το γράφημα $G^{αντ}$.

Αλγόριθμος ισχυρής συνεκτικότητας

Θεώρημα. Μπορεί να αποφασιστεί αν το G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$.

- Διάλεξε οποιαδήποτε κορυφή s .
- Τρέξε στο G τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του G προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).
- Αντίστρεψε την φορά όλων των ακμών στο G και πάρε το γράφημα $G^{\text{αντ}}$.
- Τρέξε στο $G^{\text{αντ}}$ τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του $G^{\text{αντ}}$ προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).

Αλγόριθμος ισχυρής συνεκτικότητας

Θεώρημα. Μπορεί να αποφασιστεί αν το G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$.

- Διάλεξε οποιαδήποτε κορυφή s .
- Τρέξε στο G τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του G προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).
- Αντίστρεψε την φορά όλων των ακμών στο G και πάρε το γράφημα $G^{\text{αντ}}$.
- Τρέξε στο $G^{\text{αντ}}$ τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του $G^{\text{αντ}}$ προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).
- Επίστρεψε “Αληθές” αν και οι δύο κλήσεις του BFS προσπέλασαν όλες τις κορυφές του G και $G^{\text{αντ}}$.

Αλγόριθμος ισχυρής συνεκτικότητας

Θεώρημα. Μπορεί να αποφασιστεί αν το G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα σε χρόνο $\mathcal{O}(m + n)$.

- Διάλεξε οποιαδήποτε κορυφή s .
- Τρέξε στο G τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του G προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).
- Αντίστρεψε την φορά όλων των ακμών στο G και πάρε το γράφημα $G^{\text{αντ}}$.
- Τρέξε στο $G^{\text{αντ}}$ τον αλγόριθμο BFS με αφετηρία την s . (Αν δεν είναι όλες οι κορυφές του $G^{\text{αντ}}$ προσπελάσιμες, σταμάτα. Το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό).
- Επίστρεψε “Αληθές” αν και οι δύο κλήσεις του BFS προσπέλασαν όλες τις κορυφές του G και $G^{\text{αντ}}$.

Ο αλγόριθμος είναι σωστός λόγω του προηγούμενου λήμματος.

Συντομότερη Διαδρομή

Δεδομένα:

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$.
- Αφετηρία s , προορισμός t .
- $\ell_e > 0$ πραγματικός αριθμός = μήκος της ακμής e .

Συντομότερη Διαδρομή

Δεδομένα:

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$.
- Αφετηρία s , προορισμός t .
- $l_e > 0$ πραγματικός αριθμός = μήκος της ακμής e .

Κόστος διαδρομής: άθροισμα μηκών των ακμών της διαδρομής.

Συντομότερη Διαδρομή

Δεδομένα:

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$.
- Αφετηρία s , προορισμός t .
- $l_e > 0$ πραγματικός αριθμός = μήκος της ακμής e .

Κόστος διαδρομής: άθροισμα μηκών των ακμών της διαδρομής.

Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής: Να βρούμε τη συντομότερη σε μήκος κατευθυνόμενη διαδρομή από την κορυφή s στην κορυφή t .

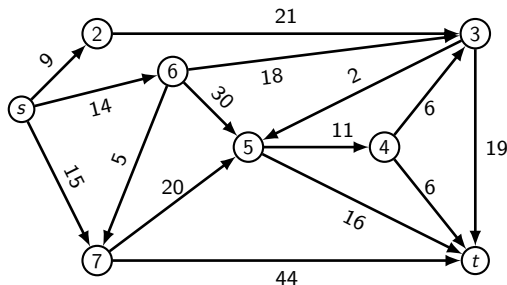
Συντομότερη Διαδρομή

Δεδομένα:

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$.
- Αφετηρία s , προορισμός t .
- $\ell_e > 0$ πραγματικός αριθμός = μήκος της ακμής e .

Κόστος διαδρομής: άθροισμα μηκών των ακμών της διαδρομής.

Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής: Να βρούμε τη συντομότερη σε μήκος κατευθυνόμενη διαδρομή από την κορυφή s στην κορυφή t .



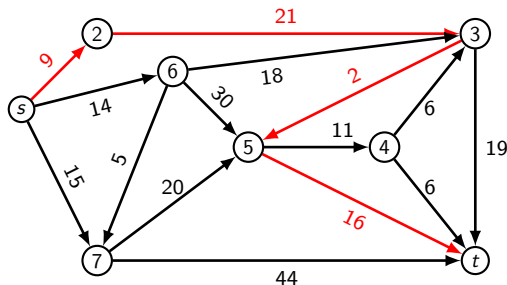
Συντομότερη Διαδρομή

Δεδομένα:

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$.
- Αφετηρία s , προορισμός t .
- $\ell_e > 0$ πραγματικός αριθμός = μήκος της ακμής e .

Κόστος διαδρομής: άθροισμα μηκών των ακμών της διαδρομής.

Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής: Να βρούμε τη συντομότερη σε μήκος κατευθυνόμενη διαδρομή από την κορυφή s στην κορυφή t .



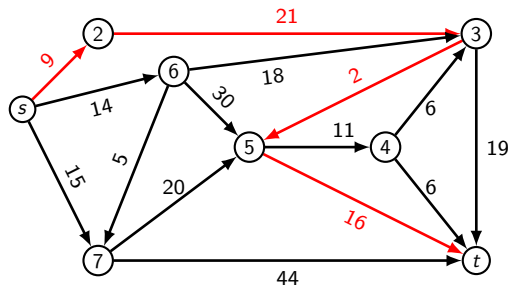
Συντομότερη Διαδρομή

Δεδομένα:

- Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$.
- Αφετηρία s , προορισμός t .
- $\ell_e > 0$ πραγματικός αριθμός = μήκος της ακμής e .

Κόστος διαδρομής: άθροισμα μηκών των ακμών της διαδρομής.

Πρόβλημα συντομότερης διαδρομής: Να βρούμε τη συντομότερη σε μήκος κατευθυνόμενη διαδρομή από την κορυφή s στην κορυφή t .



$$\begin{aligned} & \text{Μήκος διαδρομής} \\ & (s \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow t) = \\ & 9 + 21 + 2 + 16 = 48 \end{aligned}$$