

# Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

**Αρχοντία Γιαννοπούλου**  
Όλγα Φουρτουνέλλη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διαίρει και Κυριεύε

Πλησιέστερο Ζεύγος Σημείων

## Πλησιέστερο ζεύγος σημείων

Δεδομένων  $n$  σημείων στο επίπεδο, βρείτε ένα ζευγάρι με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

## Πλησιέστερο ζεύγος σημείων

Δεδομένων  $n$  σημείων στο επίπεδο, βρείτε ένα ζευγάρι με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

Θεμελιώδες γεωμετρικό πρόβλημα.

## Πλησιέστερο ζεύγος σημείων

Δεδομένων  $n$  σημείων στο επίπεδο, βρείτε ένα ζευγάρι με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

Θεμελιώδες γεωμετρικό πρόβλημα.

- Γραφικά,

## Πλησιέστερο ζεύγος σημείων

Δεδομένων  $n$  σημείων στο επίπεδο, βρείτε ένα ζευγάρι με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

Θεμελιώδες γεωμετρικό πρόβλημα.

- Γραφικά,
- όραση υπολογιστών,

## Πλησιέστερο ζεύγος σημείων

Δεδομένων  $n$  σημείων στο επίπεδο, βρείτε ένα ζευγάρι με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

Θεμελιώδες γεωμετρικό πρόβλημα.

- Γραφικά,
- όραση υπολογιστών,
- συστήματα γεωγραφικών πληροφοριών,

## Πλησιέστερο ζεύγος σημείων

Δεδομένων  $n$  σημείων στο επίπεδο, βρείτε ένα ζευγάρι με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

Θεμελιώδες γεωμετρικό πρόβλημα.

- Γραφικά,
- όραση υπολογιστών,
- συστήματα γεωγραφικών πληροφοριών,
- σχεδίαση μορίων,

## Πλησιέστερο ζεύγος σημείων

Δεδομένων  $n$  σημείων στο επίπεδο, βρείτε ένα ζευγάρι με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ τους.

Θεμελιώδες γεωμετρικό πρόβλημα.

- Γραφικά,
- όραση υπολογιστών,
- συστήματα γεωγραφικών πληροφοριών,
- σχεδίαση μορίων,
- έλεγχος εναέριας κυκλοφορίας.

# Αρχικές παρατηρήσεις

## Αρχικές παρατηρήσεις

Αρκούν  $\mathcal{O}(n^2)$  βήματα. Με ωμή βία, συγκρίνουμε όλα τα ζεύγη σημείων  $p$  και  $q$  με  $\Theta(n^2)$  συγκρίσεις.

## Αρχικές παρατηρήσεις

Αρκούν  $\mathcal{O}(n^2)$  βήματα. Με ωμή βία, συγκρίνουμε όλα τα ζεύγη σημείων  $p$  και  $q$  με  $\Theta(n^2)$  συγκρίσεις.

Αν όλα τα σημεία βρίσκονται σε μία διάσταση τότε μας αρκούν  $\mathcal{O}(n \log n)$  βήματα (ταξινομώντας).

## Αρχικές παρατηρήσεις

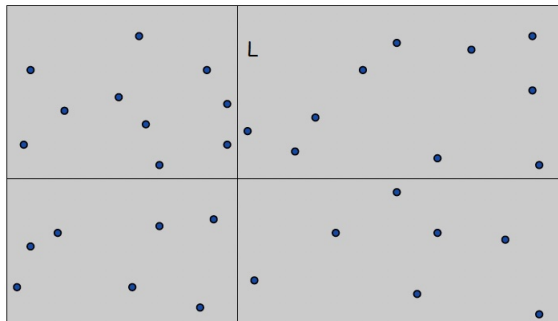
Αρκούν  $\mathcal{O}(n^2)$  βήματα. Με ωμή βία, συγκρίνουμε όλα τα ζεύγη σημείων  $p$  και  $q$  με  $\Theta(n^2)$  συγκρίσεις.

Αν όλα τα σημεία βρίσκονται σε μία διάσταση τότε μας αρκούν  $\mathcal{O}(n \log n)$  βήματα (ταξινομώντας).

Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι δύο σημεία δεν μπορούν να έχουν την ίδια  $x$  συντεταγμένη.

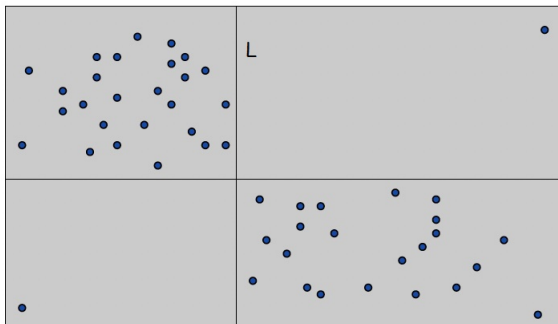
# Διάρει

Απόπειρα 1: Διάρεσε την περιοχή που περιέχει όλα τα δοσμένα σημεία σε 4 τεταρτημόρια.



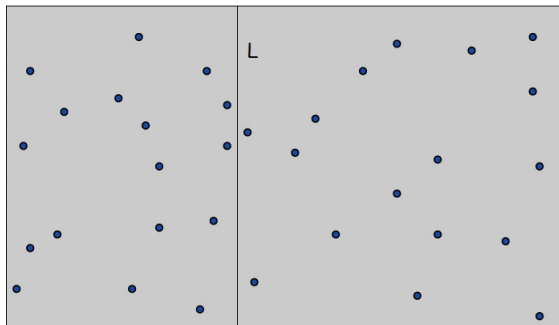
# Αποτυχία πρώτης απόπειρας

Δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι κάθε τεταρτημόριο θα έχει  $\frac{n}{4}$  σημεία.



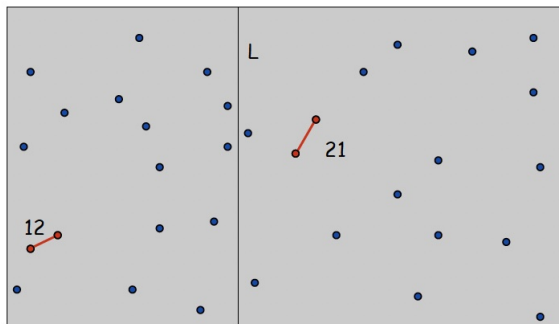
# Διαίρει

Χωρίζουμε την περιοχή σε 2 υποπεριοχές όπου κάθε μία από τις δύο έχει περίπου  $\frac{n}{2}$  σημεία (τραβώντας κατάλληλα κάθετη στον άξονα  $x$ ).



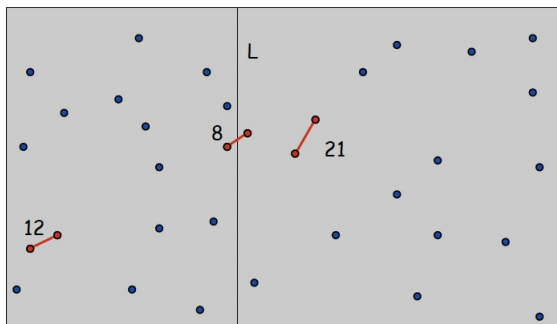
# Κυρίευε

Λύνουμε αναδρομικά το πρόβλημα σε κάθε μία από τις δύο υποπεριοχές.



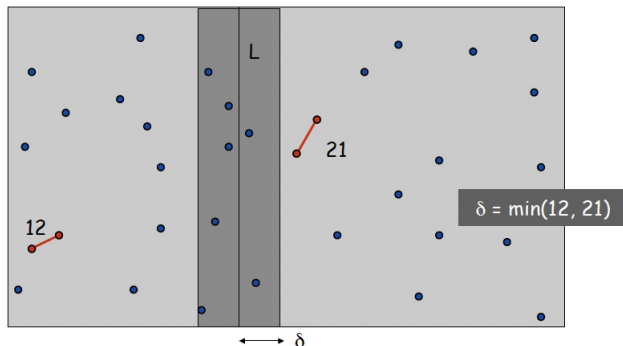
# Συνδύαζε

Τέλος βρίσκουμε το κοντινότερο ζευγάρι σημείων από διαφορετικές περιοχές και επιτρέφουμε το κοντινότερο από όλα.



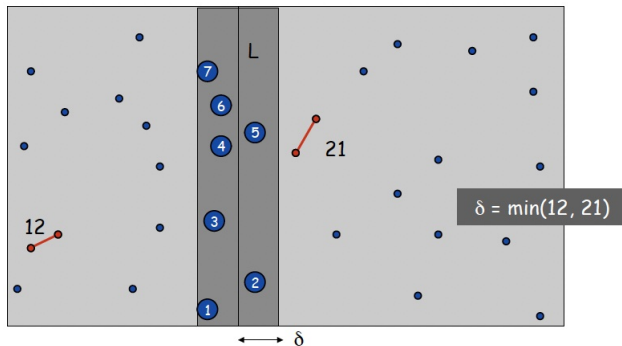
## Πώς συνδυάζουμε;

Βρίσκουμε το κοντινότερο ζευγάρι υποθέτοντας ότι αν υπάρχει η απόσταση του θα είναι μικρότερη από  $\delta = \min\{12, 21\}$ .



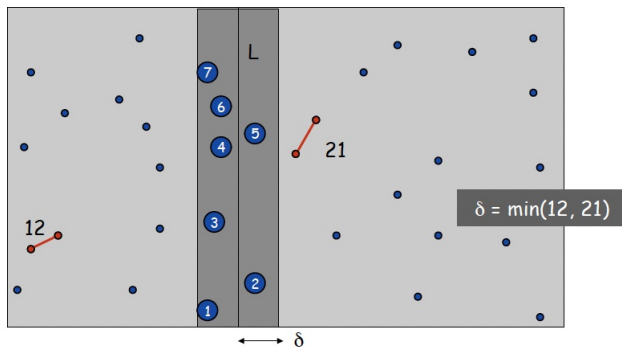
## Πώς συνδυάζουμε;

Ταξινομούμε τα στοιχεία σύμφωνα με τη συντεταγμένη  $y$ .



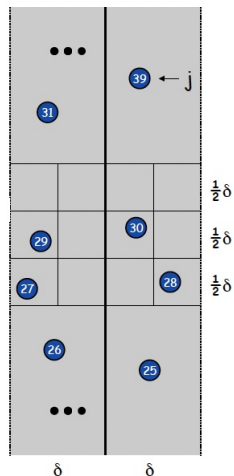
## Πώς συνδυάζουμε;

Ταξινομούμε τα στοιχεία σύμφωνα με τη συντεταγμένη  $y$ .  
Ελέγχουμε μόνο τις αποστάσεις των σημείων μέχρι 11 θέσεις μακριά.



Γιατί αρκούν οι 11 θέσεις;

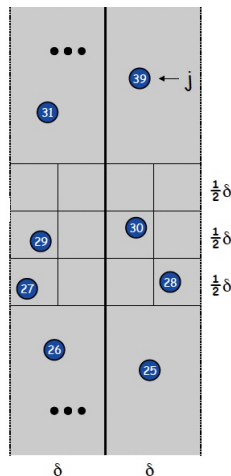
Έστω  $s_i$  το στοιχείο με την  $i$ -οστή συντεταγμένη.



## Γιατί αρκούν οι 11 θέσεις;

Έστω  $s_i$  το στοιχείο με την  $i$ -οστή συντεταγμένη.

**Ισχυρισμός:** Αν  $|i - j| \geq 12$  τότε η απόσταση ανάμεσα στα  $s_i$  και  $s_j$  είναι τουλάχιστον  $\delta$ .

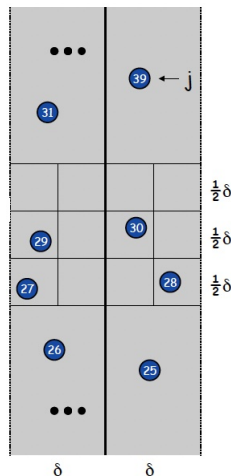


## Γιατί αρκούν οι 11 θέσεις;

Έστω  $s_i$  το στοιχείο με την  $i$ -οστή συντεταγμένη.

**Ισχυρισμός:** Αν  $|i - j| \geq 12$  τότε η απόσταση ανάμεσα στα  $s_i$  και  $s_j$  είναι τουλάχιστον  $\delta$ .

- Δεν υπάρχουν δύο σημεία που να βρίσκονται ταυτόχρονα σε ένα κουτί  $\frac{\delta}{2} \times \frac{\delta}{2}$ .

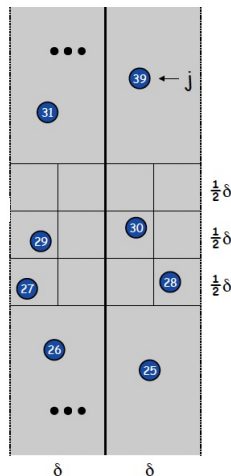


## Γιατί αρκούν οι 11 θέσεις;

Έστω  $s_i$  το στοιχείο με την  $i$ -οστή συντεταγμένη.

**Ισχυρισμός:** Αν  $|i - j| \geq 12$  τότε η απόσταση ανάμεσα στα  $s_i$  και  $s_j$  είναι τουλάχιστον  $\delta$ .

- Δεν υπάρχουν δύο σημεία που να βρίσκονται ταυτόχρονα σε ένα κουτί  $\frac{\delta}{2} \times \frac{\delta}{2}$ .
- Κάθε δύο σημεία που διαφέρουν κατά τουλάχιστον 2 σειρές έχουν απόσταση  $\geq 2 \frac{\delta}{2} = \delta$ .



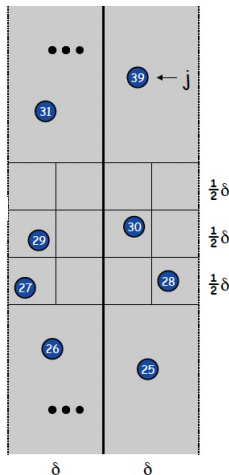
## Γιατί αρκούν οι 11 θέσεις;

Έστω  $s_i$  το στοιχείο με την  $i$ -οστή συντεταγμένη.

**Ισχυρισμός:** Αν  $|i - j| \geq 12$  τότε η απόσταση ανάμεσα στα  $s_i$  και  $s_j$  είναι τουλάχιστον  $\delta$ .

- Δεν υπάρχουν δύο σημεία που να βρίσκονται ταυτόχρονα σε ένα κουτί  $\frac{\delta}{2} \times \frac{\delta}{2}$ .
- Κάθε δύο σημεία που διαφέρουν κατά τουλάχιστον 2 σειρές έχουν απόσταση  $\geq 2 \frac{\delta}{2} = \delta$ .

Με διαφορετική απόδειξη: Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το 12 με 7.



## Ο αλγόριθμος

**Closest-Pair**( $p_1, \dots, p_n$ )

{

**Υπολόγισε** διαχωριστική γραμμή  $L$  τέτοια ώστε τα μισά σημεία να είναι στη μία πλευρά και τα μισά στην άλλη.

$\delta_1 = \text{Closest-Pair}$ (αριστερό μισό)

$\delta_2 = \text{Closest-Pair}$ (δεξί μισό)

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

**Διέγραψε** όλα τα σημεία πιο μακριά από  $\delta$  από τη διαχωριστική γραμμή  $L$

**Ταξινόμησε** τα υπόλοιπα σημεία ως προς την  $y$ -συντεταγμένη.

**Προσπέλασε** τα σημεία με τη σειρά της  $y$ -συντεταγμένης και σύγκρινε την απόσταση μεταξύ κάθε σημείου και των επόμενων 11 γειτόνων. Αν κάποια από αυτές τις αποστάσεις είναι μικρότερη από  $\delta$ , ενημέρωσε το  $\delta$ .

Επίστρεψε  $\delta$ .

}

# Πολυπλοκότητα

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n \log n)$$

Τότε

$$T(n) = \mathcal{O}(n \log^2 n). \quad (\text{Άσκηση})$$

# Πολυπλοκότητα

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n \log n)$$

Τότε

$$T(n) = \mathcal{O}(n \log^2 n). \quad (\text{Άσκηση})$$

Μπορούμε να πετύχουμε  $\mathcal{O}(n \log n)$  πολυπλοκότητα;

# Πολυπλοκότητα

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n \log n)$$

Τότε

$$T(n) = \mathcal{O}(n \log^2 n). \quad (\text{Άσκηση})$$

Μπορούμε να πετύχουμε  $\mathcal{O}(n \log n)$  πολυπλοκότητα;

**ΝΑΙ!**

# Πολυπλοκότητα

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n \log n)$$

Τότε

$$T(n) = \mathcal{O}(n \log^2 n). \quad (\text{Άσκηση})$$

Μπορούμε να πετύχουμε  $\mathcal{O}(n \log n)$  πολυπλοκότητα;

**ΝΑΙ!** Μπορούμε πριν τρέξουμε τον αλγόριθμο να δώσουμε τα στοιχεία ταξινομημένα σε δύο πίνακες, έναν ως προς την  $x$  και έναν ως προς την  $y$  συντεταγμένη. Κάθε φορά που καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο δίνουμε και τις θέσεις των στοιχείων ως προς τους δύο ταξινομημένους πίνακες.

## Πολυπλοκότητα

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n \log n)$$

Τότε

$$T(n) = \mathcal{O}(n \log^2 n). \quad (\text{Άσκηση})$$

Μπορούμε να πετύχουμε  $\mathcal{O}(n \log n)$  πολυπλοκότητα;

**ΝΑΙ!** Μπορούμε πριν τρέξουμε τον αλγόριθμο να δώσουμε τα στοιχεία ταξινομημένα σε δύο πίνακες, έναν ως προς την  $x$  και έναν ως προς την  $y$  συντεταγμένη. Κάθε φορά που καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο δίνουμε και τις θέσεις των στοιχείων ως προς τους δύο ταξινομημένους πίνακες.

Τότε, αρχικά χρησιμοποιήσαμε  $\mathcal{O}(n \log n)$  για τις ταξινομήσεις. Μετά για τον αλγόριθμο ισχύει ότι  $T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n)$ .

$$\text{Άρα } T(n) = \mathcal{O}(n \log n).$$

# Άσκηση

Δίνεται πίνακας  $A$  μεγέθους  $n$  με το χαρακτηριστικό ότι υπάρχει θέση  $i$  τέτοια ώστε η ακολουθία  $A[1], A[2], \dots, A[i]$  είναι γνησίως αύξουσα ενώ η ακολουθία  $A[i + 1], \dots, A[n]$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Να δώσετε αλγόριθμο που σε χρόνο  $\mathcal{O}(\log n)$  εντοπίζει τη θέση  $i$  και να επιχειρηματολογήσετε πλήρως για την πολυπλοκότητά του.