Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Αρχοντία Γιαννοπούλου
Όλγα Φουρτουνέλλη

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέτρηση Αντιστροφών
Κυρίαρχο Χρώμα
Ο Αλγόριθμος του Karatsuba

Θεώρημα Κυρίαρχου Όρου (Master Theorem)

Έστω $a > 0$, $b \geq 1$, $d \geq 0$ σταθερές και $T(n)$ ορισμένη στους μη-αρνητικούς ακέραιους ως

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \mathcal{O}(n^d).$$

Θεώρημα Κυρίαρχου Όρου (Master Theorem)

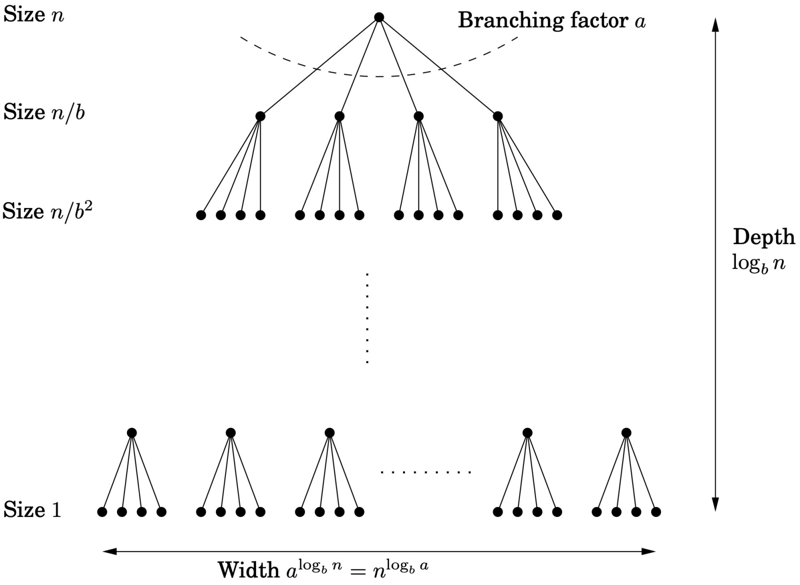
Έστω $a > 0$, $b \geq 1$, $d \geq 0$ σταθερές και $T(n)$ ορισμένη στους μη-αρνητικούς ακέραιους ως

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \mathcal{O}(n^d).$$

Τότε:

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n^d) & \text{εάν } d > \log_b a \\ \mathcal{O}(n^d \log n) & \text{εάν } d = \log_b a \\ \mathcal{O}(n^{\log_b a}) & \text{εάν } d < \log_b a \end{cases}$$

Ιδέα



Size n
Branching factor a
Size n/b
Size n/b^2
Depth $\log_b n$
Size 1
Width $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Ιδέα

Στο k-οστό επίπεδο έχουμε:

- a^k υποπροβλήματα μεγέθους $\frac{n}{b^k}$ που το καθένα απαιτεί $\mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{b^k}\right)^d\right)$ βήματα.

Ιδέα

Στο k-οστό επίπεδο έχουμε:

- a^k υποπροβλήματα μεγέθους $\frac{n}{b^k}$ που το καθένα απαιτεί $\mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{b^k}\right)^d\right)$ βήματα.
- άρα ο χρόνος που απαιτείται είναι $a^k \times \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{b^k}\right)^d\right) = \mathcal{O}(n^d) \times \left(\frac{a}{b^d}\right)^k$.

Συνολικά

$$\sum_{k=0}^{\log_b n} \mathcal{O}(n^d) \times \left(\frac{a}{b^d}\right)^k = \mathcal{O}(n^d) \times \sum_{k=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k$$

Ιδέα

Στο k-οστό επίπεδο έχουμε:

- a^k υποπροβλήματα μεγέθους $\frac{n}{b^k}$ που το καθένα απαιτεί $\mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{b^k}\right)^d\right)$ βήματα.
- άρα ο χρόνος που απαιτείται είναι $a^k \times \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{b^k}\right)^d\right) = \mathcal{O}(n^d) \times \left(\frac{a}{b^d}\right)^k$.

Συνολικά

$$\sum_{k=0}^{\log_b n} \mathcal{O}(n^d) \times \left(\frac{a}{b^d}\right)^k = \mathcal{O}(n^d) \times \sum_{k=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k$$

Το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται από τον λόγο $\frac{a}{b^d}$.

Ιδέα

Ισχύει ότι:

$$\sum_{k=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & \frac{a}{b^d} < 1 \\ \log_b n + 1 & \frac{a}{b^d} = 1 \\ \mathcal{O}\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}\right) & \frac{a}{b^d} > 1 \end{cases}$$

Και άρα

$$\mathcal{O}(n^d) \times \sum_{k=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k = \begin{cases} \mathcal{O}(n^d) \cdot \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n^d) & \frac{a}{b^d} < 1 \\ \mathcal{O}(n^d)(\log_b n + 1) = \mathcal{O}(n^d \log n) & \frac{a}{b^d} = 1 \\ \mathcal{O}(n^d) \cdot \mathcal{O}\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}\right) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) & \frac{a}{b^d} > 1 \end{cases}$$

Γενικότερα...

Έστω ότι $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, με $a \geq 1, b > 1$ σταθερές και $f(n)$ κάποια συνάρτηση.

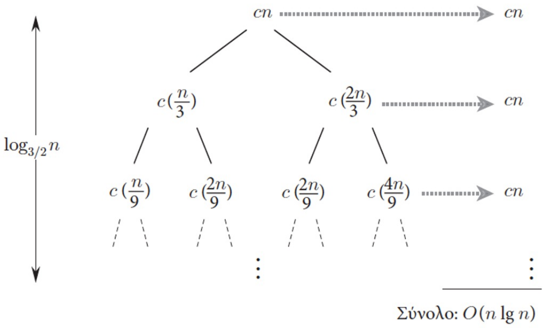
- Αν $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$ τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
- Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$ και $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c < 1$ και n αρκετά μεγάλα τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

Ασκήσεις για σκέψη...

- $T(n) = T(n-1) + 2$.
- $T(n) = 2T(n-1) + 1$.
- $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n$.
- $T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + cn$.
- $T(n) = T(\sqrt{n}) + \log n$.

Παράδειγμα

$T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + cn$



Σχήμα 4.6 Ένα δένδρο αναδρομής για την αναδρομική σχέση $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$.

Μέτρηση Αντιστροφών

Είσοδος: Πίνακας A με n στοιχεία που αποτελείται από φυσικούς αριθμούς.
Ζητούμενο: Να βρούμε πόσα ζευγάρια (i, j) υπάρχουν με $i < j$ και $A[i] > A[j]$.

Για παράδειγμα, στον πίνακα

1	3	5	2	4

τα ζευγάρια 3 - 2, 5 - 2, και 5 - 4 εμφανίζονται αντεστραμμένα.

Άρα αυτός ο πίνακας έχει 3 αντιστροφές.

Παραδείγματα χρησιμότητας

Μια εφαρμογή μουσικής προσπαθεί να συγκρίνει τις προτιμήσεις σας με τις προτιμήσεις άλλων.

- Κατατάσσετε n τραγούδια με βάση τη σειρά προτίμησης.
- Η εφαρμογή ψάχνει στη βάση δεδομένων για χρήστες με παρόμοια κατάταξη αυτών των τραγουδιών.

Πώς αποφασίζει την ομοιότητα των κατατάξεων;

Παραδείγματα χρησιμότητας

Μια εφαρμογή μουσικής προσπαθεί να συγκρίνει τις προτιμήσεις σας με τις προτιμήσεις άλλων.

- Κατατάσσετε n τραγούδια με βάση τη σειρά προτίμησης.
- Η εφαρμογή ψάχνει στη βάση δεδομένων για χρήστες με παρόμοια κατάταξη αυτών των τραγουδιών.

Πώς αποφασίζει την ομοιότητα των κατατάξεων;

Υπολογίζοντας πόσα ζευγάρια τραγουδιών έχετε κατατάξει αντίστροφα.

Παραδείγματα χρησιμότητας

- Κατατάσσω τα τραγούδια με τη σειρά $1, 2, \ldots, n$.
- Κάποιος άλλος κατατάσσει τα ίδια τραγούδια στη σειρά $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Έχουμε διαφορετική προτίμηση στα τραγούδια i και j αν $i < j$ αλλά $a_i > a_j$.

Παραδείγματα χρησιμότητας

- Κατατάσσω τα τραγούδια με τη σειρά 1, 2, . . . , n.
- Κάποιος άλλος κατατάσσει τα ίδια τραγούδια στη σειρά $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Έχουμε διαφορετική προτίμηση στα τραγούδια i και j αν $i < j$ αλλά $a_i > a_j$.

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Εγώ	1	2	3	4	5
Εσύ	1	3	5	2	4

Παραδείγματα χρησιμότητας

- Κατατάσσω τα τραγούδια με τη σειρά $1, 2, \ldots, n$.
- Κάποιος άλλος κατατάσσει τα ίδια τραγούδια στη σειρά $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Έχουμε διαφορετική προτίμηση στα τραγούδια i και j αν $i < j$ αλλά $a_i > a_j$.

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Εγώ	1	2	3	4	5
Εσύ	1	3	5	2	4

Αν ελέγξουμε όλα τα ζευγάρια τραγουδιών χρειαζόμαστε $\Theta(n^2)$ συγκρίσεις.

Άλλες εφαρμογές

- Θεωρία ψηφοφορίας.
- Συνεργατικό φιλτράρισμα.
- Μέτρηση του ταξινομημένου ποσοστού ενός πίνακα.
- Ανάλυση ευαισθησίας της συνάρτησης κατάταξης της Google.

Μέτρηση αντιστροφών: Διαίρει και Κυρίευε

- **Διαίρει**: Σπάμε τον πίνακα σε δύο υποπίνακες A_1 και A_2 με το μισό πλήθος στοιχείων ο καθένας.

Μέτρηση αντιστροφών: Διαίρει και Κυρίευε

- **Διαίρει**: Σπάμε τον πίνακα σε δύο υποπίνακες A_1 και A_2 με το μισό πλήθος στοιχείων ο καθένας.
- **Κυρίευε**: Λύνουμε αναδρομικά το πρόβλημα σε κάθε έναν από τους δύο υποπίνακες. Τότε μαθαίνουμε το πλήθος των αντιστροφών που περιέχονται πλήρως μέσα στον A_1 και μέσα στον A_2.

Μέτρηση αντιστροφών: Διαίρει και Κυρίευε

- **Διαίρει**: Σπάμε τον πίνακα σε δύο υποπίνακες A_1 και A_2 με το μισό πλήθος στοιχείων ο καθένας.
- **Κυρίευε**: Λύνουμε αναδρομικά το πρόβλημα σε κάθε έναν από τους δύο υποπίνακες. Τότε μαθαίνουμε το πλήθος των αντιστροφών που περιέχονται πλήρως μέσα στον A_1 και μέσα στον A_2.
- Εκκρεμεί το πλήθος των αντιστροφών που το μεγαλύτερο (γιατί;) στοιχείο βρίσκεται στον A_1 και το μικρότερο στον A_2.

Μέτρηση αντιστροφών: Διαίρει και Κυρίευε

- **Διαίρει**: Σπάμε τον πίνακα σε δύο υποπίνακες A_1 και A_2 με το μισό πλήθος στοιχείων ο καθένας.
- **Κυρίευε**: Λύνουμε αναδρομικά το πρόβλημα σε κάθε έναν από τους δύο υποπίνακες. Τότε μαθαίνουμε το πλήθος των αντιστροφών που περιέχονται πλήρως μέσα στον A_1 και μέσα στον A_2.
- Εκκρεμεί το πλήθος των αντιστροφών που το μεγαλύτερο (γιατί;) στοιχείο βρίσκεται στον A_1 και το μικρότερο στον A_2.
- **Συνδύαζε**: Μετράμε πόσες αντιστροφές υπάρχουν με το μεγαλύτερο στοιχείο στον πρώτο υποπίνακα A_1 και το μικρότερο στοιχείο στον δεύτερο υποπίνακα A_2.

Μέτρηση αντιστροφών: Διαίρει και Κυρίευε

- **Διαίρει**: Σπάμε τον πίνακα σε δύο υποπίνακες A_1 και A_2 με το μισό πλήθος στοιχείων ο καθένας.
- **Κυρίευε**: Λύνουμε αναδρομικά το πρόβλημα σε κάθε έναν από τους δύο υποπίνακες. Τότε μαθαίνουμε το πλήθος των αντιστροφών που περιέχονται πλήρως μέσα στον A_1 και μέσα στον A_2.
- Εκκρεμεί το πλήθος των αντιστροφών που το μεγαλύτερο (γιατί;) στοιχείο βρίσκεται στον A_1 και το μικρότερο στον A_2.
- **Συνδύαζε**: Μετράμε πόσες αντιστροφές υπάρχουν με το μεγαλύτερο στοιχείο στον πρώτο υποπίνακα A_1 και το μικρότερο στοιχείο στον δεύτερο υποπίνακα A_2. (Πώς;)

10	5	8	6	3	4	7	1	9	2	11

10	5	8	6	3	4

7	1	9	2	11

Σύνολο: $12 + 3 + 15 = 30$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

$\downarrow$ 6

3	4	5	6	8	10

$\downarrow$ 5

1	2	7	9	11

Σύνολο:

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

↓ 6

3	4	5	6	8	10

↓ 4

1	2	7	9	11

1

Σύνολο: 6

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

↓ 6 ↓ 3

3	4	5	6	8	10

1	2	7	9	11

1	2

Σύνολο: $6 + 6$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

$\downarrow 5$ $\qquad\qquad$ $\downarrow 3$

3	4	5	6	8	10

1	2	7	9	11

1	2	3

Σύνολο: $6 + 6$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

$\downarrow$ 4

3	4	5	6	8	10

$\downarrow$ 3

1	2	7	9	11

1	2	3	4

Σύνολο: $6 + 6$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

$\downarrow 3$ $\qquad\qquad$ $\downarrow 3$

3	4	5	6	8	10

1	2	7	9	11

1	2	3	4	5

Σύνολο: $6 + 6$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

$\downarrow 2$ $\downarrow 3$

3	4	5	6	8	10

1	2	7	9	11

1	2	3	4	5	6

Σύνολο: $6 + 6$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

$\downarrow 2$ $\qquad\qquad$ $\downarrow 2$

3	4	5	6	8	10

1	2	7	9	11

1	2	3	4	5	6	7

Σύνολο: $6 + 6 + 2$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

					↓ 1
3	4	5	6	8	10

			↓ 2	
1	2	7	9	11

1	2	3	4	5	6	7	8

Σύνολο: $6 + 6 + 2$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

					$\downarrow$ 1
3	4	5	6	8	10

				$\downarrow$ 1
1	2	7	9	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Σύνολο: $6 + 6 + 2 + 1$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

↓ 0 ↓ 1

3	4	5	6	8	10

1	2	7	9	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Σύνολο: $6 + 6 + 2 + 1$

Πώς συνδυάζουμε;

- Θέλουμε να μετρήσουμε τα αντεστραμμένα κόκκινο-μπλέ ζευγάρια αριθμών.
  Έχει σημασία σε ποιά θέση του κόκκινου πίνακα και σε ποιά θέση του μπλέ πίνακα βρίσκονται το κόκκινο και το μπλέ στοιχείο που αποτελούν αντιστροφή;
- Ας υποθέσουμε ότι για κάθε υποπίνακα έχουμε μετρήσει τις αντιστροφές και ταυτόχρονα τον έχουμε ταξινομήσει.
- Θα συγχωνεύσουμε τους δύο υποπίνακες σε έναν ταξινομημένο πίνακα υπολογίζοντας παράλληλα τις μεταξύ τους αντιστροφές.

$\downarrow 0$ $\qquad\qquad$ $\downarrow 0$

3	4	5	6	8	10

1	2	7	9	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Σύνολο: $6 + 6 + 2 + 1$

Συγχώνευση ταξινομημένων πινάκων και μέτρημα αντιστροφών

Έστω a και b δύο ταξινομημένοι πίνακες με m και n στοιχεία αντίστοιχα.

Διαδικασία merge-and-count(a, b)
$r \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
$j \leftarrow 1$
Για $k = 1$ ως $m + n$
    Εάν $a_i < b_j$
        τότε $c_k \leftarrow a_i$
            $i \leftarrow i + 1$
        αλλιώς $c_k \leftarrow b_j$
            $j \leftarrow j + 1$
            $r \leftarrow r + m - i + 1$

Πολυπλοκότητα: $\mathcal{O}(m + n)$

Μέτρηση αντιστροφών

Διαδικασία sort-and-count(A)

Εάν ο πίνακας A έχει ένα στοιχείο
επίστρεψε 0 και τον πίνακα A.

Χώρισε τον πίνακα A σε δύο μισά A_1 και A_2
$(r_{A_1}, A_1) \leftarrow$ **sort-and-count**(A_1)
$(r_{A_2}, A_2) \leftarrow$ **sort-and-count**(A_2)
$(r, A) \leftarrow$ **merge-and-count**(A_1, A_2)

επίστρεψε $i = r_{A_1} + r_{A_2} + r$ και τον πίνακα A.

Όπου **merge-and-count** είναι ο αλγόριθμος που περιγράψαμε στην προηγούμενη σελίδα.

Εντοπισμός κυρίαρχου χρώματος

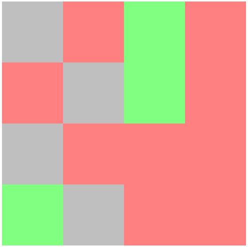
Είσοδος: Μία σκακιέρα διάστασης $n \times n$ (όπου $n = 2^k$ για κάποιο k) όπου κάθε πλακίδιο είναι χρωματισμένο με κάποιο χρώμα.
Ζητούμενο: Να εντοπίσουμε αν υπάρχει κάποιο (κυρίαρχο) χρώμα που να εμφανίζεται σε πάνω από τις μισές θέσεις τις σκακιέρας.

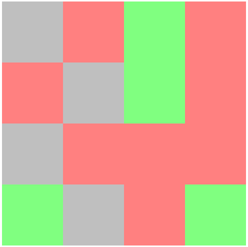
Δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των χρωμάτων που εμφανίζονται στη σκακιέρα.

Εντοπισμός κυρίαρχου χρώματος

Είσοδος: Μία σκακιέρα διάστασης $n \times n$ (όπου $n = 2^k$ για κάποιο k) όπου κάθε πλακίδιο είναι χρωματισμένο με κάποιο χρώμα.
Ζητούμενο: Να εντοπίσουμε αν υπάρχει κάποιο (κυρίαρχο) χρώμα που να εμφανίζεται σε πάνω από τις μισές θέσεις τις σκακιέρας.

Δεν υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των χρωμάτων που εμφανίζονται στη σκακιέρα.





Στην αριστερά σκακιέρα το κόκκινο είναι το κυρίαρχο χρώμα γιατί το κόκκινο καλύπτει $9 > \frac{4 \times 4}{2}$ τετράγωνα ενώ η δεξιά σκακιέρα δεν έχει κυρίαρχο χρώμα γιατί το κόκκινο καλύπτει $8 = \frac{4 \times 4}{2}$ τετράγωνα.

Αλγόριθμος ωμής βίας (brute force)

- Αν εμφανίζονται συνολικά $m \leq n^2$ χρώματα τότε για κάθε χρώμα c_i μπορούμε να καταμετρήσουμε σε χρόνο $\Theta(n^2)$ το πλήθος των εμφανίσεών τους.

Αλγόριθμος ωμής βίας (brute force)

- Αν εμφανίζονται συνολικά $m \leq n^2$ χρώματα τότε για κάθε χρώμα c_i μπορούμε να καταμετρήσουμε σε χρόνο $\Theta(n^2)$ το πλήθος των εμφανίσεών τους.

- Η καταμέτρηση των εμφανίσεων για όλα τα χρώματα γίνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(m \cdot n^2)$.

Αλγόριθμος ωμής βίας (brute force)

- Αν εμφανίζονται συνολικά $m \leq n^2$ χρώματα τότε για κάθε χρώμα c_i μπορούμε να καταμετρήσουμε σε χρόνο $\Theta(n^2)$ το πλήθος των εμφανίσεών τους.

- Η καταμέτρηση των εμφανίσεων για όλα τα χρώματα γίνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(m \cdot n^2)$.

  Πώς;

Αλγόριθμος ωμής βίας (brute force)

- Αν εμφανίζονται συνολικά $m \leq n^2$ χρώματα τότε για κάθε χρώμα c_i μπορούμε να καταμετρήσουμε σε χρόνο $\Theta(n^2)$ το πλήθος των εμφανίσεών τους.

- Η καταμέτρηση των εμφανίσεων για όλα τα χρώματα γίνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(m \cdot n^2)$.

  Πώς;

  Για κάθε νέο πλακίδιο που επισκέπτομαι ελέγχω όλα τα προηγούμενα χρώματα που έχω βρει για να δω αν είναι ίδιο με κάποιο από αυτά και αν ναι αυξάνω την τιμή του κατά 1. Αν το χρώμα είναι νέο το ορίζω και του δίνω την τιμή 1.

Αλγόριθμος ωμής βίας (brute force)

- Αν εμφανίζονται συνολικά $m \leq n^2$ χρώματα τότε για κάθε χρώμα c_i μπορούμε να καταμετρήσουμε σε χρόνο $\Theta(n^2)$ το πλήθος των εμφανίσεών τους.

- Η καταμέτρηση των εμφανίσεων για όλα τα χρώματα γίνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(m \cdot n^2)$.

  Πώς;

  Για κάθε νέο πλακίδιο που επισκέπτομαι ελέγχω όλα τα προηγούμενα χρώματα που έχω βρει για να δω αν είναι ίδιο με κάποιο από αυτά και αν ναι αυξάνω την τιμή του κατά 1. Αν το χρώμα είναι νέο το ορίζω και του δίνω την τιμή 1.

- Ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για να βρω το χρώμα με το μεγαλύτερο πλήθος εμφανίσεων είναι $\mathcal{O}(m \cdot n^2)$ και άρα $\mathcal{O}(n^4)$.

Διαίρει και Κυρίευε

Σπάω την σκακιέρα σε 4 σκακιέρες διάστασης $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ και βρίσκω τη λύση σε καθεμία από αυτές ξεχωριστά.

Οι πιθανές απαντήσεις που θα πάρω είναι οι εξής:

Διαίρει και Κυρίευε

Σπάω την σκακιέρα σε 4 σκακιέρες διάστασης $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ και βρίσκω τη λύση σε καθεμία από αυτές ξεχωριστά.

Οι πιθανές απαντήσεις που θα πάρω είναι οι εξής:

- Καμμία δεν έχει κυρίαρχο χρώμα.

Διαίρει και Κυρίευε

Σπάω την σκακιέρα σε 4 σκακιέρες διάστασης $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ και βρίσκω τη λύση σε καθεμία από αυτές ξεχωριστά.

Οι πιθανές απαντήσεις που θα πάρω είναι οι εξής:

- Καμμία δεν έχει κυρίαρχο χρώμα.
- Όλες οι υποσκακιέρες έχουν το ίδιο κυρίαρχο χρώμα c.

Διαίρει και Κυρίευε

Σπάω την σκακιέρα σε 4 σκακιέρες διάστασης $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ και βρίσκω τη λύση σε καθεμία από αυτές ξεχωριστά.

Οι πιθανές απαντήσεις που θα πάρω είναι οι εξής:

- Καμμία δεν έχει κυρίαρχο χρώμα.
- Όλες οι υποσκακιέρες έχουν το ίδιο κυρίαρχο χρώμα c.
- Τουλάχιστον μία υποσκακιέρα έχει κυρίαρχο χρώμα αλλά οι απαντήσεις στις άλλες υποσκακιέρες δεν συμφωνούν με αυτό.

Παρατηρήσεις

- Αν η αρχική σκακιέρα έχει κυρίαρχο χρώμα τότε αυτό είναι κυρίαρχο σε τουλάχιστον μία από τις 4 υποσκακιέρες.

- Αν $n = 1$ τότε το χρώμα του μοναδικού πλακιδίου είναι το κυρίαρχο.

Παρατηρήσεις

Κάθε μία από τις υποσκακιέρες Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 είτε έχει κάποιο κυρίαρχο χρώμα c_1, c_2, c_3, c_4 αντίστοιχα ή δεν έχει κυρίαρχο χρώμα.

Παρατηρήσεις

Κάθε μία από τις υποσκακιέρες Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 είτε έχει κάποιο κυρίαρχο χρώμα c_1, c_2, c_3, c_4 αντίστοιχα ή δεν έχει κυρίαρχο χρώμα.

Ωστόσο, αν η αρχική σκακιέρα έχει κυρίαρχο χρώμα τότε αυτό είναι ένα από τα c_1, c_2, c_3, c_4 και άρα αρκεί να μετρήσουμε τις εμφανίσεις αυτών των 4 χρωμάτων για να βρούμε αν κάποιο από αυτά είναι κυρίαρχο.

Παρατηρήσεις

Κάθε μία από τις υποσκακιέρες Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 είτε έχει κάποιο κυρίαρχο χρώμα c_1, c_2, c_3, c_4 αντίστοιχα ή δεν έχει κυρίαρχο χρώμα.

Ωστόσο, αν η αρχική σκακιέρα έχει κυρίαρχο χρώμα τότε αυτό είναι ένα από τα c_1, c_2, c_3, c_4 και άρα αρκεί να μετρήσουμε τις εμφανίσεις αυτών των 4 χρωμάτων για να βρούμε αν κάποιο από αυτά είναι κυρίαρχο.

Αυτό το μέτρημα απαιτεί χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$. (Μετράμε μόνο τις εμφανίσεις των 4 χρωμάτων. Για κάθε πλακίδιο από τα n^2 ελέγχουμε αν το χρώμα του είναι κάποιο από αυτά τα 4 και, αν ναι, αυξάνουμε το πλήθος του αντίστοιχα.)

Πολυπλοκότητα του αλγόριθμου

Ισχύει ότι: $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n^2)$.

Πολυπλοκότητα του αλγόριθμου

Ισχύει ότι: $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n^2)$.

Από το Θεώρημα Κυρίαρχου Όρου:

$$T(n) = \mathcal{O}(n^2 \log n).$$

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός Ακεραίων

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός μονοψήφιων ακεραίων:

Πρόσθεση *n*-**ψήφιων** ακεραίων:

Πολλαπλασιασμός *n*-**ψήφιων** ακεραίων:

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός Ακεραίων

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός μονοψήφιων ακεραίων: $\mathcal{O}(1)$.

Πρόσθεση *n*-**ψήφιων** ακεραίων:

Πολλαπλασιασμός *n*-**ψήφιων** ακεραίων:

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός Ακεραίων

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός μονοψήφιων ακεραίων: $\mathcal{O}(1)$.

Πρόσθεση n-**ψήφιων** ακεραίων: $\mathcal{O}(n)$.

Πολλαπλασιασμός n-**ψήφιων** ακεραίων:

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός Ακεραίων

Πρόσθεση/Πολλαπλασιασμός μονοψήφιων ακεραίων: $\mathcal{O}(1)$.

Πρόσθεση n-**ψήφιων** ακεραίων: $\mathcal{O}(n)$.

Πολλαπλασιασμός n-**ψήφιων** ακεραίων: $\mathcal{O}(n^2)$ από τον αλγόριθμο που μαθαίνουμε στο σχολείο.

Σχολικός Αλγόριθμος

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο των αριθμών 1357 και 2468. Τότε:

Σχολικός Αλγόριθμος

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο των αριθμών 1357 και 2468. Τότε:

$$
\begin{array}{r}
1\,3\,5\,7 \\
\times \quad 2\,4\,6\,8 \\
\hline
1\,0\,8\,5\,6 \\
8\,1\,4\,2 \\
5\,4\,2\,8 \\
2\,7\,1\,4 \\
\hline
3\,3\,4\,9\,0\,7\,6
\end{array}
$$

Σχολικός Αλγόριθμος

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο των αριθμών 1357 και 2468. Τότε:

$$
\begin{array}{r}
1\,3\,5\,7 \\
\times \quad 2\,4\,6\,8 \\
\hline
1\,0\,8\,5\,6 \\
8\,1\,4\,2 \\
5\,4\,2\,8 \\
2\,7\,1\,4 \\
\hline
3\,3\,4\,9\,0\,7\,6
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1357 \cdot 2468 &= 1357 \cdot (2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0) \\
&= 1357 \cdot 2 \cdot 10^3 + 1357 \cdot 4 \cdot 10^2 \\
&+ 1357 \cdot 6 \cdot 10^1 + 1357 \cdot 8 \cdot 10^0
\end{aligned}
$$

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$1357 \cdot 2468 \quad =$$

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$1357 \cdot 2468 \quad = \quad (13 \cdot 10^2 + 57) \cdot (24 \cdot 10^2 + 68)$$

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
1357 \cdot 2468 &= (13 \cdot 10^2 + 57) \cdot (24 \cdot 10^2 + 68) \\
&= 13 \cdot 24 \cdot 10^4
\end{aligned}
$$

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
1357 \cdot 2468 &= (13 \cdot 10^2 + 57) \cdot (24 \cdot 10^2 + 68) \\
&= 13 \cdot 24 \cdot 10^4 + (13 \cdot 68 + 57 \cdot 24) \cdot 10^2
\end{aligned}
$$

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
1357 \cdot 2468 &= (13 \cdot 10^2 + 57) \cdot (24 \cdot 10^2 + 68) \\
&= 13 \cdot 24 \cdot 10^4 + (13 \cdot 68 + 57 \cdot 24) \cdot 10^2 + 57 \cdot 68
\end{aligned}
$$

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} 1357 \cdot 2468 &= (13 \cdot 10^2 + 57) \cdot (24 \cdot 10^2 + 68) \\ &= 13 \cdot 24 \cdot 10^4 + (13 \cdot 68 + 57 \cdot 24) \cdot 10^2 + 57 \cdot 68 \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο σπάσαμε τον υπολογισμό του πολλαπλασιασμού δύο αριθμών με n ψηφία σε 4 πολλαπλασιασμούς αριθμών με $\frac{n}{2}$ ψηφία

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
1357 \cdot 2468 &= (13 \cdot 10^2 + 57) \cdot (24 \cdot 10^2 + 68) \\
&= 13 \cdot 24 \cdot 10^4 + (13 \cdot 68 + 57 \cdot 24) \cdot 10^2 + 57 \cdot 68
\end{aligned}
$$

Με αυτό τον τρόπο σπάσαμε τον υπολογισμό του πολλαπλασιασμού δύο αριθμών με n ψηφία σε 4 πολλαπλασιασμούς αριθμών με $\frac{n}{2}$ ψηφία (συν 3 προσθέσεις και μετατοπίσεις που χρειάζονται $\mathcal{O}(n)$ χρόνο).

Ξαναγράφουμε το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
1357 \cdot 2468 &= (13 \cdot 10^2 + 57) \cdot (24 \cdot 10^2 + 68) \\
&= 13 \cdot 24 \cdot 10^4 + (13 \cdot 68 + 57 \cdot 24) \cdot 10^2 + 57 \cdot 68
\end{aligned}
$$

Με αυτό τον τρόπο σπάσαμε τον υπολογισμό του πολλαπλασιασμού δύο αριθμών με n ψηφία σε 4 πολλαπλασιασμούς αριθμών με $\frac{n}{2}$ ψηφία (συν 3 προσθέσεις και μετατοπίσεις που χρειάζονται $\mathcal{O}(n)$ χρόνο).

Δεν κερδίσαμε χρόνο!!! :(

Δεύτερη προσπάθεια

Έστω x και y δύο n-ψήφιοι αριθμοί (ας υποθέσουμε αρχικά ότι το n είναι δύναμη του 2).

Δεύτερη προσπάθεια

Έστω x και y δύο n-ψήφιοι αριθμοί (ας υποθέσουμε αρχικά ότι το n είναι δύναμη του 2).

Όπως πριν:

$$
\begin{aligned}
x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\
y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta)
\end{aligned}
$$

όπου οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ έχουν $\frac{n}{2}$ ψηφία.

Δεύτερη προσπάθεια

Έστω x και y δύο n-ψήφιοι αριθμοί (ας υποθέσουμε αρχικά ότι το n είναι δύναμη του 2).

Όπως πριν:

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

όπου οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ έχουν $\frac{n}{2}$ ψηφία.

Θα δείξουμε ότι αρκούν 3 πολλαπλασιασμοί αριθμών με $\frac{n}{2}$ ψηφία.

Πώς;

$$
\begin{aligned}
x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\
y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta)
\end{aligned}
$$

Τότε:

$$
x \cdot y = (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \cdot (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta)
$$

Πώς;

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \cdot (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \\ &= \alpha \cdot \gamma \cdot 10^{n} + (\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta \end{aligned}$$

Πώς;

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \cdot (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \\ &= \alpha \cdot \gamma \cdot 10^{n} + (\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta \\ &= \alpha \cdot \gamma \cdot 10^{n} + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta \end{aligned}$$

Πώς;

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \cdot (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \\ &= \alpha \cdot \gamma \cdot 10^{n} + (\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta \\ &= \alpha \cdot \gamma \cdot 10^{n} + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta \end{aligned}$$

Οι πολλαπλασιασμοί που χρειαζόμαστε είναι οι:

- $\alpha \cdot \gamma$
- $\beta \cdot \delta$
- $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta)$

Ο αλγόριθμος

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$x \cdot y \quad = \alpha \cdot \gamma \cdot 10^{n} + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta$$

Ο αλγόριθμος

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$x \cdot y = \alpha \cdot \gamma \cdot 10^n + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta$$

Ο αλγόριθμος:

- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_1 = \alpha \cdot \gamma$

Ο αλγόριθμος

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$x \cdot y = \alpha \cdot \gamma \cdot 10^n + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta$$

Ο αλγόριθμος:

- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_1 = \alpha \cdot \gamma$
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_2 = \beta \cdot \delta$

Ο αλγόριθμος

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$x \cdot y = \alpha \cdot \gamma \cdot 10^n + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta$$

Ο αλγόριθμος:

- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_1 = \alpha \cdot \gamma$
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_2 = \beta \cdot \delta$
- Υπολογίζει τα αθροίσματα $(\alpha + \beta)$ και $(\gamma + \delta)$.

Ο αλγόριθμος

$$
\begin{aligned}
x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\
y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta)
\end{aligned}
$$

Τότε:

$$x \cdot y = \alpha \cdot \gamma \cdot 10^n + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta$$

Ο αλγόριθμος:

- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_1 = \alpha \cdot \gamma$
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_2 = \beta \cdot \delta$
- Υπολογίζει τα αθροίσματα $(\alpha + \beta)$ και $(\gamma + \delta)$.
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_3 = (\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta)$

Ο αλγόριθμος

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$x \cdot y \quad = \alpha \cdot \gamma \cdot 10^n + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta$$

Ο αλγόριθμος:

- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_1 = \alpha \cdot \gamma$
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_2 = \beta \cdot \delta$
- Υπολογίζει τα αθροίσματα $(\alpha + \beta)$ και $(\gamma + \delta)$.
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_3 = (\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta)$
- Υπολογίζει το άθροισμα $z = z_3 - z_1 - z_2$.

Ο αλγόριθμος

$$\begin{aligned} x &= (\alpha \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta) \\ y &= (\gamma \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \delta) \end{aligned}$$

Τότε:

$$x \cdot y \quad = \alpha \cdot \gamma \cdot 10^n + [(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) - \alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta] \cdot 10^{\frac{n}{2}} + \beta \cdot \delta$$

Ο αλγόριθμος:

- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_1 = \alpha \cdot \gamma$
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_2 = \beta \cdot \delta$
- Υπολογίζει τα αθροίσματα $(\alpha + \beta)$ και $(\gamma + \delta)$.
- Πολλαπλασιάζει αναδρομικά το $z_3 = (\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta)$
- Υπολογίζει το άθροισμα $z = z_3 - z_1 - z_2$.
- Μετατοπίζει κατάλληλα τα z_1, z_2 και υπολογίζει το τελικό άθροισμα.

Χρόνος Υπολογισμού

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n)$$

Χρόνος Υπολογισμού

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n)$$

Ισχύει ότι:

$$1 < \log_2 3 < 2 = \log_2 4$$

Χρόνος Υπολογισμού

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n)$$

Ισχύει ότι:

$$1 < \log_2 3 < 2 = \log_2 4$$

Άρα από το Βασικό Θεώρημα:

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3}) = \mathcal{O}(n^{1.585})$$

Θεώρημα

Δύο ακέραιοι n-ψηφίων μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε $\mathcal{O}(n^{1.585})$ βήματα.

$$T\left(n\right) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + \mathcal{O}\left(n\right)$$

Karatsuba-Ofman, 1962

Θεώρημα

Δύο ακέραιοι n-ψηφίων μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε $\mathcal{O}(n^{1.585})$ βήματα.

$$T\left(n\right) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + \mathcal{O}\left(n\right)$$

Karatsuba-Ofman, 1962

Ιδέα: Gauss.

Θεώρημα

Δύο ακέραιοι n-ψηφίων μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε $\mathcal{O}(n^{1.585})$ βήματα.

$$T(n) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + \mathcal{O}(n)$$

Karatsuba-Ofman, 1962

Ιδέα: Gauss.

Παρατηρώντας ότι: $(a+bi)(c+di) = ac - bd + (bc+ad)i$, όπου
$(bc+ad) = (a+b)(c+d) - ac - db$.